
## کاربرد مشتق

### یکنوایی تابع و رابطه آن با مشتق

در فصل اول تابع صعودی و نزولی را آموختیم .

طبق فصل اول:

تابع $f$ را در بازه ای **صعودی** میگوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه در این بازه : $a<b \Rightarrow f(a) \le f(b)$

تابع $f$ را در بازه ای **نزولی** میگوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه در این بازه : $a<b \Rightarrow f(a) \ge f(b)$

حال در فصل جدید میخواهیم تعریف جدیدی از صعودی و نزولی بودن را ارائه بدهیم.

از روی شکل تابع مشخص است که وقتی تابع صعودی است شیب خط مماس مثبت است یعنی می توان نتیجه گرفت وقتی تابع صعودی است مشتق مثبت است. و همین طور در مورد تابع نزولی.

پس میتوان تعریف جدید زیر را در نظرگرفت:


تابع پیوسته $f$ در بازه $(a,b)$ اکیداً صعودی است $\Leftrightarrow x_\circ \in (a,b); f'(x_\circ) > 0$

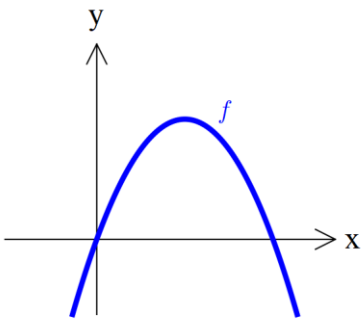
تابع پیوسته $f$ در بازه $(a,b)$ اکیداً نزولی است $\Leftrightarrow x_\circ \in (a,b); f'(x_\circ) < 0$

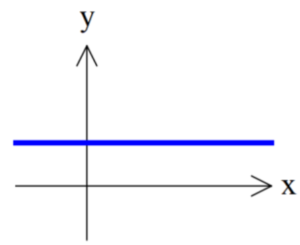
تابع پیوسته در بازه $(a,b)$ ثابت است $\Leftrightarrow x_\circ \in (a,b); f'(x_\circ) = 0$

برای یکنوایی تابع پیوسته $f(x)$ (برای صعودی یا نزولی بودن تابع) ابتدا از تابع مشتق میگیریم ، سپس تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم. بازه هایی که <u>مشتق مثبت</u> است <u>تابع صعودی</u> و بازه هایی که <u>مشتق منفی</u> است <u>تابع نزولی</u> است.

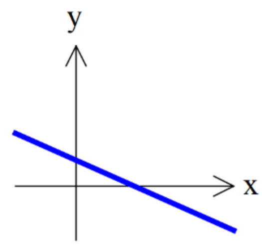
**مثال:** یکنوایی تابع $f\left(x\right)=x^{۲}-۴x$ را مشخص کنید. (ازدوراه، شکل و مشتق)

**مثال:** نمودار تابع $f$ در شکل روبرو آمده است. با بیان دلیل مشخص کنید کدام یک از نمودار های زیر، نمودار مشتق تابع $f$ است؟

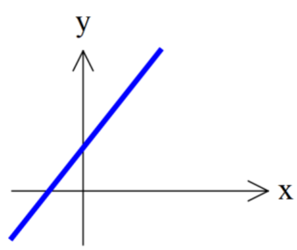



الف




ب




پ

**مثال:** با رسم تابع $f\left(x\right)=x^{۲}+۱$ مشخص کنید کجا صعودی و کجا نزولی است سپس همین موضوع را با مشتق بررسی کنید.

**مثال:** جدول تغییرات تابع $f(x)=-2x^{2}+8x$ را رسم کنید و از روی جدول مشخص کنید کجاها صعودی و کجاها نزولی است؟

**مثال:** جدول تغییرات تابع $f(x)=x^{3}-12x$ را رسم کنید و از روی جدول مشخص کنید کجاها صعودی و کجاها نزولی است؟

## تعریف اکسترمم تابع

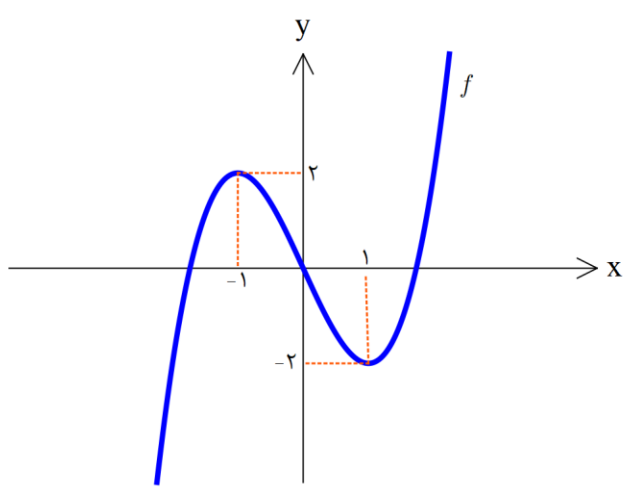
گوییم تابع در نقطه ای به طول $a$ **ماکزیمم نسبی** دارد هرگاه همسایگی از $a$ موجود باشد که در تمام نقاط این همسایگی نقطه $a$ عرض بیشتری داشته باشد. و تابع در نقطه ای به طول $a$ دارای **مینیمم نسبی** است هرگاه همسایگی از $a$ موجود باشد که در تمام نقاط این همسایگی نقطه $a$ عرض کمتری داشته باشد.

**نکته**: اگر وضعیت تابع پیوسته در نقطه ای به این صورت باشد که قبل از آن نقطه مشتق منفی و بعد از آن نقطه مشتق مثبت باشد، آن نقطه را مینیمم و اگر قبل نقطه مشتق مثبت و بعد از آن مشتق منفی باشد آن نقطه را ماکزیمم می گوییم.

| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | | $+$ |
| $y$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

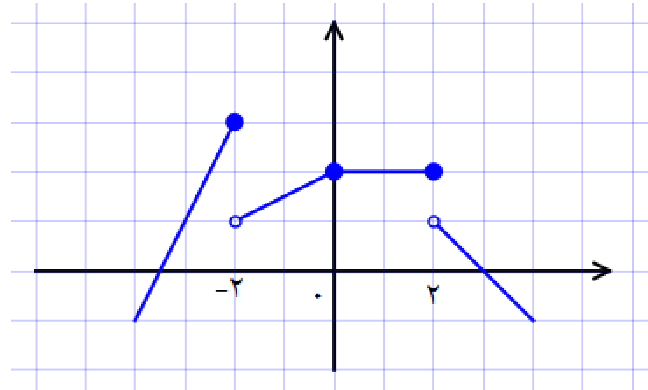
| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | | $-$ |
| $y$ | $\nearrow$ | max | $\searrow$ |

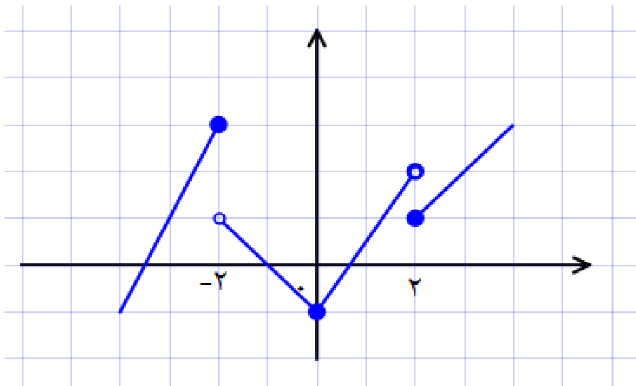
**مثال:** در شکل روبرو تابع $f\left(x\right)=x^{۳}-۳x$ را رسم کرده ایم.در کدام بازه ها تابع صعودی و در کدام بازه ها تابع نزولی است؟ (از روی شکل) سپس جدول تغییرات مشتق را رسم کنید و دوباره به سوالات بالا پاسخ دهید.



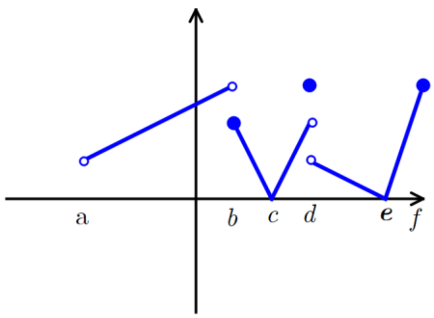

**مثال:** وضعیت یکنوایی و طول نقاط اکسترمم تابع $y=-x^{۳}+۳x$ را مشخص کنید.

📖 **مثال:** در توابع رسم شده زیر نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی را مشخص کنید.

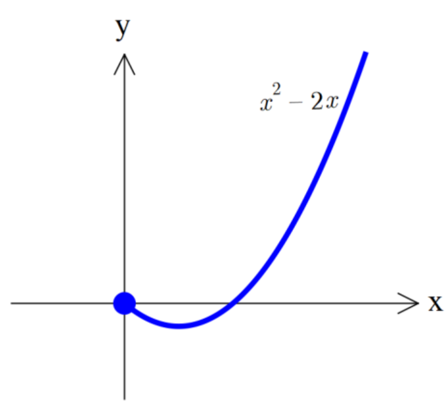


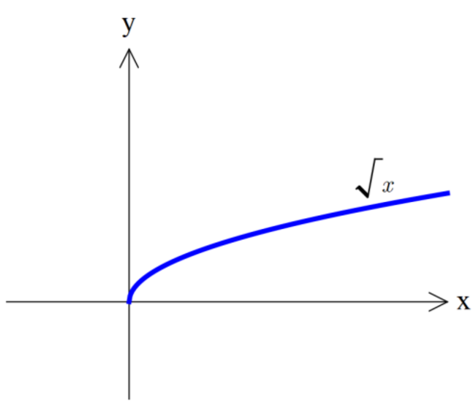




📖 **مثال:** در چند نقطه از شکل مقابل اکسترمم نسبی داریم.




📖 **مثال:** وضعیت اکسترمم نسبی هر یک از توابع زیر را در بازه ی داده شده بررسی کنید.



**مثال:** جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 3x + 4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. شهریور۹۸

**مثال:** با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 10$ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی را در صورت وجود بیابید. دی۹۸

**مثال:** نقاط اکسترمم تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ را بیابید.

**مثال:** نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ را بیابید.

**مثال:** تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول تغییرات تابع ، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی را به دست آورید. خرداد۹۹

**نکته:** اگر نقطه $(a,b)$ نقطه اکسترمم نسبی (ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی) تابعی <u>پیوسته</u> باشد، در این صورت دو شرط زیر همواره برقرار است.

۱- نقطه مورد نظر در ضابطه تابع صدق میکند. یعنی $f(a)=b$

۲- طول نقطه مورد نظر ریشه مشتق اول تابع است. یعنی : $f'(a)=0$

**مثال:** اگر تابع $f(x)=(1-m)x^2+(m^2-6)x+1$ در نقطه ای به طول $-1$ ماکزیمم داشته باشد، مقدار $m$ چیست؟

**مثال:** در تابع $y=ax^{۳}+bx^{۲}$ ضرایب را چنان بیابید که نقطه $(۱,۲)$ اکسترمم نسبی باشد.

**مثال:** اگر نقطه $(-۲,۵)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+b$ باشد، مقادیر $a$ و $b$ را به دست آورید.

**مثال:** مقدار $b,a$ را چنان بیابید که نقطه $A(-۱,۲)$ یک $\max$ نسبی تابع $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}$ باشد.

**مثال:** اگر $(۱,۲)$ اکسترمم نسبی $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^{۲}+۲}$ باشد، $b$ را بیابید.

**مثال:** اگر تابع $f(x)=ax^{۲}+bx$ در $x=۱$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد مقادیر $b,a$ را به دست آورید.

خرداد۹۸

**مثال:** اگر نقطه $(۲,۱)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^{۳}+bx^{۲}+d$ باشد، مقادیر $b,d$ را به دست آورید. خرداد۹۹ خارج نوبت صبح

**نکته:** در تمام مسائل اکسترمم به نکات زیر دقت ویژه داشته باشید

۱- نقاط ابتدا و انتهای بازه ی بسته، نقاط اکسترمم نسبی نیستند.

۲- اگر تابع در $x=a$ دارای اکسترمم نسبی باشد و مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'(a)=۰$

۳- لزومی ندارد تابع $f$ در نقاط اکسترمم خود پیوسته یا مشتق پذیر باشد.

۴- هر نقطه بر روی تابع ثابت هم مینیمم نسبی است هم ماکزیمم نسبی است.

**نکته** : در تابع مشتق پذیر $y=f(x)$ ریشه ساده یا ریشه از مرتبه فردِ $f'(x)=۰$، طول نقاط اکسترمم نسبی هستند و ریشه مضاعف یا ریشه مرتبه زوج طول نقاط اکسترمم نیستند.

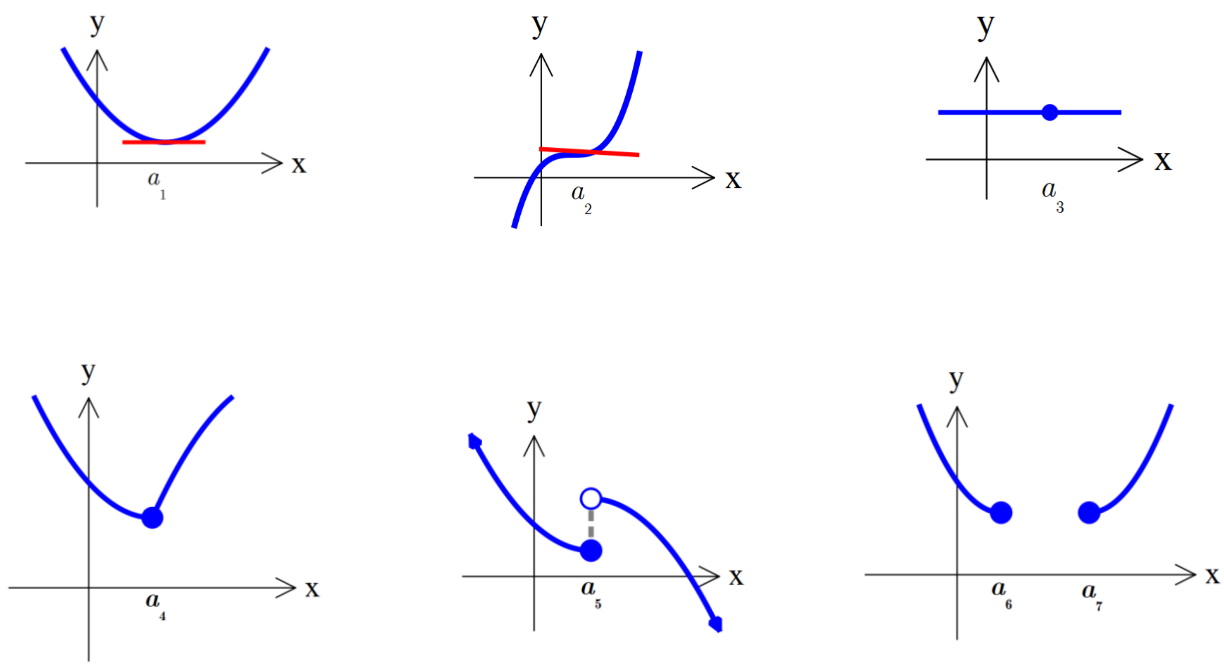
## نقطه بحرانی

تعریف

فرض کنید $a \in D_f$ باشد. نقطه ای به طول $a$ را بحرانی گوییم هرگاه: $f'(a)=0$ **یا** $f'(a)$ وجود نداشته باشد.

**مثال:** نقطه بحرانی را تعریف کنید. خرداد۹۹ خارج

در تمام شکل های زیر تمام حالت های نقطه بحرانی آمده است:




**نکته:** هر اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی است **اما** هر نقطه بحرانی لزوماً یک اکسترمم نسبی نیست.

در شکل بالا $a_7, a_6, a_2$ بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست. ولی در بقیه نقطه ها هر دو خاصیت رو داراست.

**نکته:** در حالت کلی برای یافتن نقاط بحرانی تابع پیوسته $f$ ، باید ابتدا دامنه آن را یافته و تابع مشتق را به دست آوریم و نقاطی از دامنه که مشتق در آن صفر است **یا** مشتق وجود ندارد را بیابیم.

**مثال:** نقاط بحرانی تابع $f\left(x\right)=x^{۳}-۳x^{۲}$ را بیابید.

در تابع با ضابطه $y=\left|f\left(x\right)\right|$ که در آن تابع $f$ تابعی مشتق پذیر در $R$ است، نقاط بحرانی تابع عبارتند از :

الف) ریشه های معادله $f\left(x\right)=۰$ ب) ریشه های معادله $f'\left(x\right)=۰$

**مثال:** نقاط بحرانی تابع $f\left(x\right)=\left|x^{۲}-۴\right|$ را بیابید.

**مثال:** نقاط بحرانی $f\left(x\right)=\left||x|-۲\right|$ را به دست آورید (در صورت وجود.)

## اکسترمم مطلق

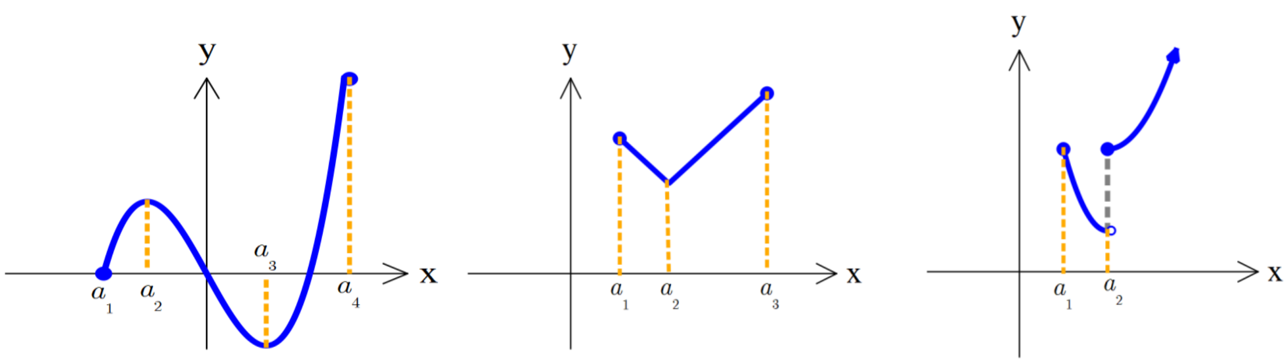
نقطه $M \in D_f$ را نقطهٔ **ماکزیمم مطلق** گوییم هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(M) \ge f(x)$ در واقع ماکزیمم مطلق نقطه ای است که عرض آن از عرضِ تمام نقاط دامنه بزرگتر باشد.

نقطه $M \in D_f$ را نقطهٔ **مینیمم مطلق** گوییم هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(M) \le f(x)$ در واقع مینیمم مطلق نقطه ای است که عرض آن از عرضِ تمام نقاط دامنه کوچکتر باشد.

یک نکته بسیار مهم در مورد اکسترمم نسبی

۱- نقاط تنها میتوانند مطلق باشند اما نسبی نیستند.    ۲- ابتدا و انتهای بازه میتوانند مطلق باشند اما نسبی نیستند.

**مثال:** در شکل های زیر وجود نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق را بررسی کنید.




**قضیه:** اگر تابعی در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، حتما در این بازه دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است.

دقت کنید اگربازه فوق باز باشد ممکن است اکسترمم مطلق نداشته باشد.

برای یافتن اکسترمم های مطلق تابع $f$ در بازه $[a,b]$ ابتدا نقاط بحرانی را در بازه $(a,b)$ یافته و مقدار تابع را در این نقاط پیدا میکنیم. سپس این مقادیر را با مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه می کنیم. نقطه یا نقاطی که دارای بیشترین عرض باشد، ماکزیمم مطلق و نقطه یا نقاطی که دارای کمترین عرض باشد مینیمم مطلق است.

**مثال:** ماکزیمم و مینیمم مطلق $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}$ را در بازه $[-۱,۶]$ بیابید.

**مثال:** اکسترمم های مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=۳x^{۴}-۴x^{۳}$ را در بازه $[-۱,۲]$ بیابید.

**مثال:** اکسترمم مطلق و نسبی $f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}-۴x+۶$ را در بازه $[-۳,۴]$ بیابید و مشخص کنید تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟

📖 **مثال:** تابعی رسم کنید که $f$ ماکزیمم مطلق داشته باشد، اما $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

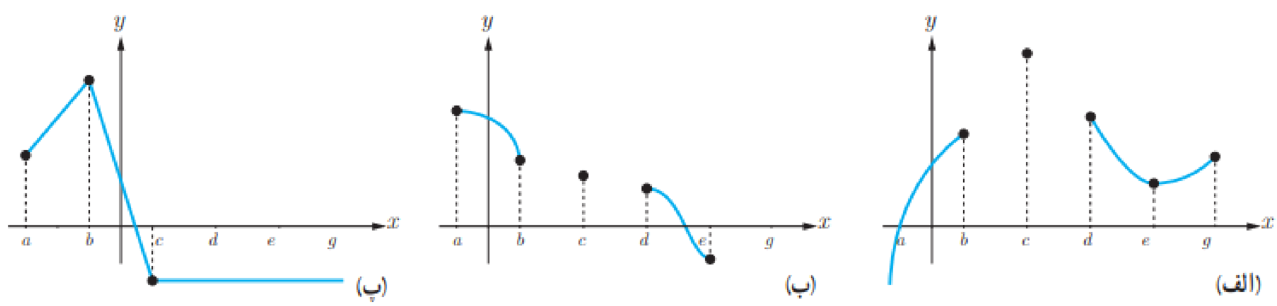
📖 **مثال:** الف) جدول تغییرات تابع $f(x)=-۲x^{۳}+۹x^{۲}-۱۳$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید.

ب) اکسترمم های مطلق تابع $f$ را در بازه ی $[-۱,۲]$ تعیین کنید. تیر۹۸

📖 **مثال:** اکسترمم های مطلق تابع $g(x)=x^{۳}+۲x-۵$ را در بازه $[-۲,۱]$ در صورت وجود تعیین کنید. شهریور۹۸ خرداد۹۹خارج نوبت عصر

**مثال:** تابع $f\left(x\right)=-۲x^{۳}+۳x^{۲}+۱۲x-۹$ را در نظر بگیرید.مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع را در بازه $\left[۰,۳\right]$ را به دست آورید. خرداد۹۹

**مثال:** در شکل های زیر نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق و نسبی را مشخص کنید.




**مثال:** نمودار یک تابعی را بکشید که در نقطه $\left(۱,۲\right)$ ماکزیمم نسبی و در نقطه $\left(-۲,-۳\right)$ مینیمم نسبی و در $\left(-۵,۷\right)$ ماکزیمم مطلق داشته باشد.

**نکته:** تابع پیوسته در بازه بسته $\left[a,b\right]$ حتما اکسترمم مطلق دارد اما در بازه باز ممکن است مطلق نداشته باشد.

**مثال:** با رسم یک شکل نشان دهید تابع پیوسته ای مثل $f$ در یک بازه بسته ماکزیمم مطلق دارد اما در یک بازه باز ماکزیمم مطلق ندارد.

## بهینه سازی

وقتی با یک سری داده ها میخواهیم بیشترین یا کمترین مقدار یک عبارتی را به دست آوریم، با مسائل بهینه سازی سرو کار داریم. مثلا میدانیم $۲x+y=۹$ مشخص است که $y, x$ های زیادی در این عبارت صدق می کنند. وقتی از ما خواسته شود بگوییم بین آن $y, x$ ها کدامشان بیشترین مقدار $xy^{۲}$ را خواهند ساخت، با مسائل بهینه سازی سر و کار داریم.

**مثال:** محیط مستطیلی ۲۰ سانتی متر است. ابعاد مستطیل را طوری بیابید که مساحت آن ماکزیمم شود.

**مثال:** اگر $y, x$ دو عدد مثبت باشند که $xy=۶$ ، مقدار مینیمم عبارت $P=۲x+۳y$ کدام است؟

**مثال:** میخواهیم در کنار یک رودخانه زمینی مستطیل شکل بخریم و دور آن را حصور بکشیم(قسمتی که کنار رودخانه قرار دارد را حصار نکشید) اگر برای کشیدن حصار ۲۰ متر نرده داشته باشیم بیشترین مساحت ممکن برای زمین چقدر است؟

**مثال:** اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتیمتر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود. دی۹۷

**مثال:** اگر بین دو عدد حقیقی $y, x$ رابطهٔ $10x - y = 5$ باشد، مقادیر $y, x$ را طوری بیابید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم شود. تیر۹۸

**مثال:** دو عدد حقیقی $b,a$ را طوری بیابید که داشته باشیم $۲a+b=۶۰$ و حاصل ضرب آنها بیشترین مقدار ممکن شود. شهریور۹۸

**مثال:** ورق فلزی مربع شکل به طول یک متر را در نظر بگیرید. میخواهیم از چهارگوشهٔ آن مربع های کوچکی به ضلع $x$ برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ $x$ برمیگردانیم تا یک جعبه درباز ساخته شود. مقدار $x$ چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر اندازه ممکن گردد. خرداد۹۸

**مثال:** اگر $۲x+y=۸$ ، بیشترین مقدار ممکن $xy^{۳}$ چقدر است ؟

**مثال:** اگر $x+y=۲$ کمترین مقدار $x^{۳}+y^{۳}$ چقدر است ؟

**مثال:** هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت $32cm^2$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایین هر صفحه $2cm$ و حاشیه های کناری هر کدام $1cm$ در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

خرداد۹۹ داخل

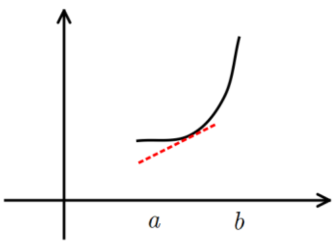
**مثال:** نشان دهید در بین تمام مستطیلهایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول وعرض آن هم اندازه باشد.

📖 **مثال:** ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دوراس آن روی محور طولها و دو راس دیگرش بالای محور طولها و روی سهمی به معادله $y = 12 - x^2$ باشند.

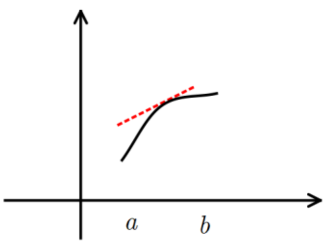
📖 **مثال:** در یک کره با شعاع ۴ یک استوانه محاط کرده ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

📖 **مثال:** یک مستطیل در یک نیمدایره به مساحت $18\pi$ محاط شده است. بیشترین مساحت ممکن برای مستطیل چقدر است؟

## تقعر و عطف منحنی




در شکل روبرو در هر نقطه از بازه $[a,b]$ هر خط مماس بر منحنی، پایین منحنی قرار دارد اصطلاحا میگوییم تقعر منحنی رو به بالاست. (گودی منحنی رو به بالا)

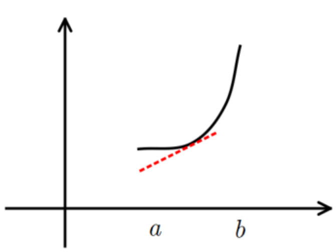



اگر در هر نقطه از بازه $[a,b]$ هر خط مماس برمنحنی، بالای منحنی قرار داشته باشند، اصطلاحاً می گوییم تقعر منحنی رو به پایین است. (گودی منحنی رو به پایین)

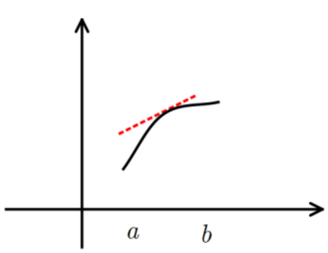
**نکته:** خطوط مماس زیر منحنی $\Longleftrightarrow$ جهت تقعر $f$ رو به بالا

خطوط مماس بالای منحنی $\Longleftrightarrow$ جهت تقعر $f$ رو به پایین

حال به شکل های بالا از منظری دیگر نگاه کنید :




در شکل روبرو شیب خطوط مماس در حال افزایش است. یعنی $f'$ صعودی است.



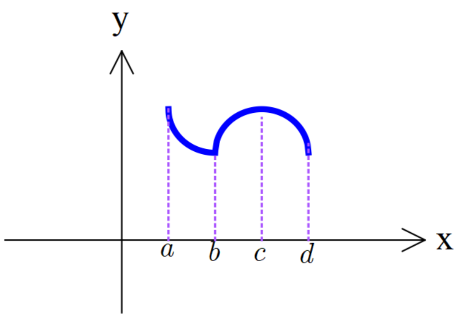

ودر شکل مقابل شیب خطوط مماس در حال کاهش است یعنی $f'$ نزولی است.

**نکته:** $f'$ صعودی $\Leftrightarrow$ شیب خطوط مماس صعودی $\Leftrightarrow$ تقعر رو به بالا

$f'$ نزولی $\Leftrightarrow$ شیب خطوط مماس نزولی $\Leftrightarrow$ تقعر رو به پایین

**مثال:** شکل روبرو نمودار تابع $f'$ است. جهت نمودار تابع $f$ در کدام بازه رو به بالاست؟

نکته: هرجایی $f'$ صعودی باشد تقعر رو به بالاست.

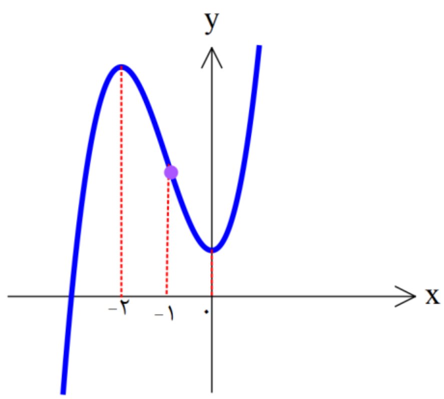



**مثال:** منحنی $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کرده و در بازه $[۰,+\infty)$ خطوط مماس بر منحنی آنها را در برخی نقاط کشیده و جهت تقعر منحنی را مشخص کنید.

**مثال:** منحنی $f(x)=\frac{۱}{x}$ را رسم کرده و جهت تقعر آن را در دامنه بیابید.

**مثال:** در شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۱$ رسم شده است.

مشخص کنید در چه بازه ای تقعر رو به بالا و در چه بازه ای تقعر رو به پایین است.




**مثال:** یک منحنی بکشید که در بازه $(-\infty, ۲)$ تقعر روبه پایین . در بازه $(۲, +\infty)$ تقعر رو به بالاباشد.

**مثال:** تابع را چنان رسم کنید که $f(-۱) = f(۱) = f(۳) = ۰$ و تابع در بازه $(-\infty, ۱)$ تقعر رو به بالا و در بازه $(۱, +\infty)$ تقعر رو به پایین باشد.

## نقطه عطف نمودار یک تابع

فرض کنید تابع $f$ در نقطه $x=c$ پیوسته باشد. نقطه $(c,f(c))$ را نقطه عطف تابع گوییم هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد.

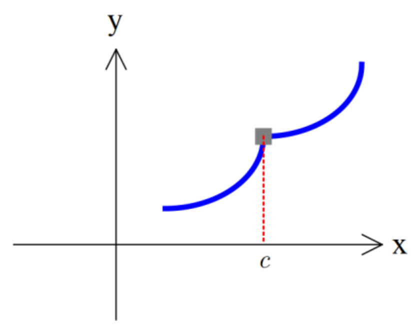
۱- نمودار در نقطه $(c,f(c))$ خط مماس داشته باشد( مماس چپ و راست فرق نداشته باشد)

یعنی یا $f'(c)$ موجود است و یا در این نقطه مماس قائم دارد. (تعریف مماس قائم صفحه ۶۷ جزوه آورده شده است)

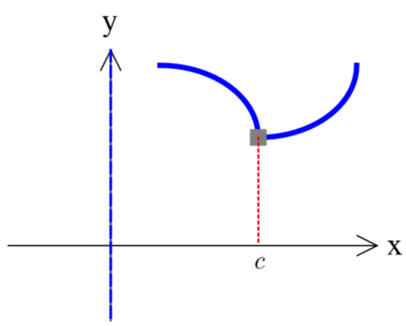
۲- جهت تقعر در نقطه $(c,f(c))$ تغییر کند.

**خیلی مهم**: به شکل های زیر دقت کنید، علت عدم وجود عطف در هر نقطه را مورد بررسی قرار داده ایم.

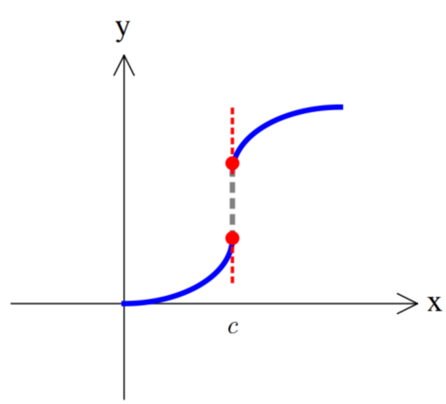
الف) تقعر اصلا عوض نشده پس $c$ عطف نیست.



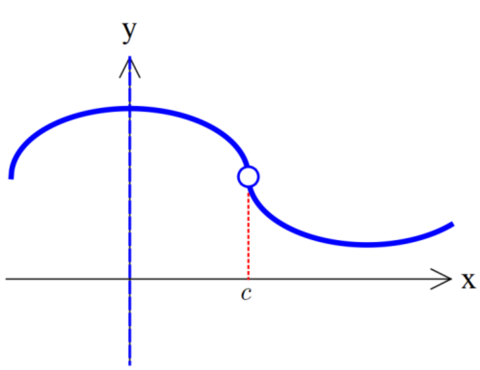

ب) تقعر عوض شده اما مماس واحد نداریم(نقطه زاویه دار یا گوشه ای داریم) پس $c$ عطف نیست.




پ) جهت تقعر عوض شده مماس واحد هم داریم اما پیوسته نیست. پس $c$ عطف نیست.




ت) جهت تقعر عوض شده اما پیوسته نیست پس $c$ عطف نیست.



قبلاً گفتیم هر تابعی صعودی باشد مشتق آن مثبت است. از این نکته به این صورت استفاده میکنیم که :

تقعر $f$ رو به بالا ← $f'$ صعودی اکید ← پس $f''>0$

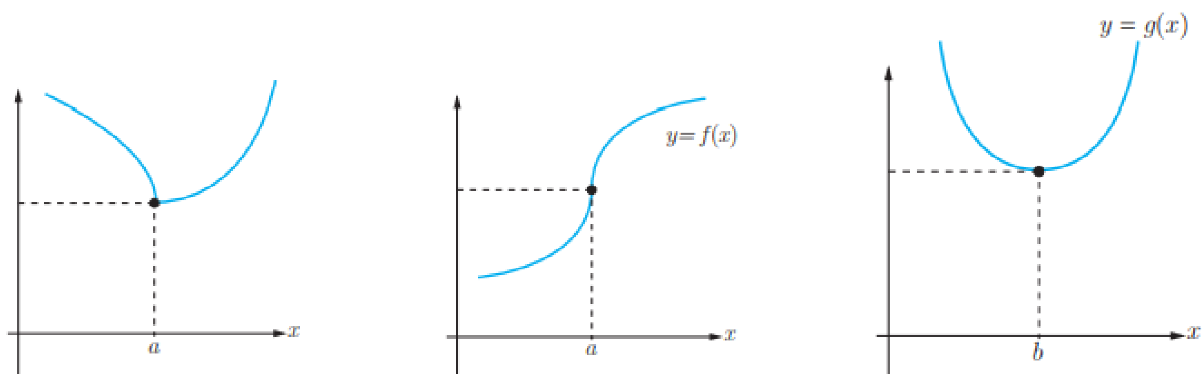
تقعر $f$ رو به پایین ← $f'$ نزولی اکید ← پس $f''<0$

**قضیه تقعر :**

جهت تقعر رو به بالا $\Leftrightarrow$ $f''(x)>0$

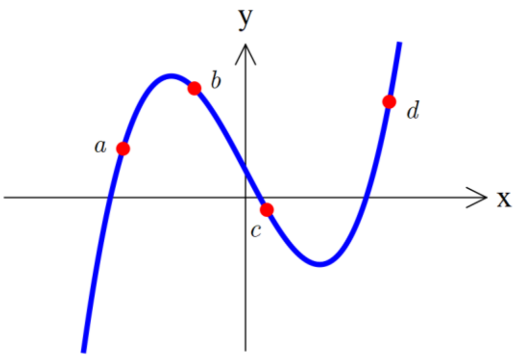
جهت تقعر رو به پایین $\Leftrightarrow$ $f''(x)<0$

**مثال:** در هر یک از نمودارهای زیر نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس ب منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.




(الف) (ب) (پ)

**مثال:** نمودار تابع $f$ رسم شده است. به سوال های زیر پاسخ دهید.

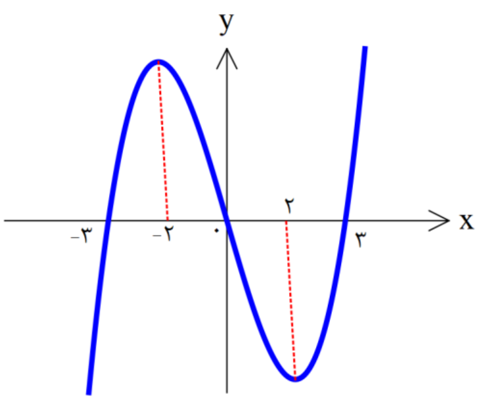



الف) در کدام نقطه از نقاط مشخص شده $f'',f'$ هر دو منفی هستند؟

ب) در کدام نقطه $f'$ منفی و $f''$ مثبت است؟

پ) در کدام نقطه $f'',f'$ مثبت هستند؟

**مثال:** نمودار تابع $f$ رسم شده است. به سوالات زیر پاسخ دهید.




الف) درچه بازه ای تقعر تابع $f$ رو به بالاست؟

ب) در چه بازه ای تقعر تابع $f$ رو به پایین است؟

پ) در چه بازه ای $f$ اکیداً صعودی است و تقعر آن رو به پایین است؟

ت) در چه بازه ای تابع $f$ اکیداً نزولی است و تقعر آن رو به بالاست؟

**مثال:** در جملات زیر دقت کنید و علت نادرستی انها را مشخص کنید.

الف) هر جا جهت عطف تغییر کند آن نقطه عطف است.

ب) هر جا علامت $f''$ تغییر کند آن نقطه عطف است.

پ) هرنقطه ای $f''$ صفر شود آن نقطه عطف است.

ت) تابع اکیدا یکنوا عطف ندارد.

**روش تعیین جهت تقعر نمودار یک تابع به کمک ضابطه آن:** مشتق دوم تابع $f$ را بدست آورده و سپس تعیین علامت میکنیم. هرجایی در جدول $f''$ مثبت بود تقعر رو به بالا و هر جایی در جدول $f''$ منفی بود تقعر رو به پایین است.

نوشته بالا خیلی دقیق و حرفه ای باید بررسی شود اما در حد ریاضی دبیرستان کفایت میکند.

📖 **مثال:** بازه ای بیابید که تقعر تابع $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$ رو به پایین بوده و تابع در این بازه نزولی باشد.

📖 **مثال:** جهت تقعر تابع را به دست آورید. نقطه عطف را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

ب) $g(x) = x^3 - 3x^2 + x$

پ) $h(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۳}$

ت) $f(x)=x^{۲}-۲\sin x$

📖 **مثال:** نقطه عطف منحنی $y=\sqrt[۳]{x}$ را بیابید.

📖 **مثال:** تابع $y=(x-۴)\sqrt[۳]{x}$ چند نقطه عطف دارد؟

**مثال:** جهت تقعر ونقطه عطف منحنی تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲+۱$ را بیابید. تیر۹۹

**نکته:** اگر نقطه $(a,b)$ نقطه عطف تابع پیوسته $f$ باشد، همواره دو شرط زیر برقرار است.

۱- $f(a)=b$ (نقطه در منحنی صدق میکند) ۲- $f''(a)=۰$ (یعنی $a$ ریشه $f''$ است)

**مثال:**اگر $A(۱,-۱)$ نقطه عطف منحنی تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^۳}$ باشد، $b-a$ را بیابید.

**مثال:** مقادیر $b,a$ را چنان بیابید که $A(۱,۱)$ نقطه عطف منحنی تابع $f(x)=ax^۳+bx^۲-۱$ باشد.خرداد۹۸

## رسم نمودار تابع

در سال های گذشته بارسم توابع خطی و درجه دو (سهمی) و قدر مطلق آشنا شدید. امسال حالت خاص تابع درجه ۳ را آموختیم. اکنون میخواهیم توابع مختلف را با کمک نقاط مهم تابع و مشتق وعطف و مجانب ها رسم کنیم.

برای رسم توابع باید مراحل زیر را طی کرد و هرکدام را در صورت وجود پیدا کرد.

۱- ابتدا دامنه تابع را می یابیم.

۲- سپس $f'$ را تعیین علامت میکنیم و صعودی و نزولی بودن و نقاط ماکزیمم و مینیمم را در صورت وجود می یابیم.

۳- تابع $f''$ را تعیین علامت میکنیم و وجود نقطه عطف و تقعر منحنی را بررسی میکنیم.

۴- محل تلاقی منحنی با محورهای مختصات را در صورت ساده بودن می یابیم.

۵- رفتار تابع را در بینهایت ها بررسی میکنیم. (این کار کمک می کند متوجه شویم برای رسم تابع از کجا شروع به رسم کنیم. )

۶- مجانب های تابع را درصورت وجود پیدا می کنیم.

**مثال:** نمودار تابع $f\left(x\right)=x^{2}-2x$ را رسم کنید.

**مثال:** نمودار تابع $f\left(x\right)=x^{۳}-۳x^{۲}$ را رسم کنید.

**مثال:** نمودار تابع $f\left(x\right)=x^{۲}-۲x$ را رسم کنید.

**مثال:** نمودار تابع $f\left(x\right)=\left(x-۱\right)^{۲}\left(x+۳\right)$ را رسم کنید.

**مثال:** نمودار تابع $f\left(x\right)=\dfrac{۲x+۱}{x-۳}$ را رسم کنید.

**مثال:** نمودار تابع $f\left(x\right)=\frac{x+4}{2x+10}$ را رسم کنید.

**مثال:** نمودار تابع $f\left(x\right)=-2x\left(x+3\right)^{2}$ را رسم کنید.

**مثال:** نمودار تابع $f\left(x\right)=\frac{x-1}{x+1}$ را رسم کنید. تیر۹۹